Klausur zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

☞ Bearbeitungsdauer: 120 min

☞ Ab 10 Punkten wird der Klausurerfolg garantiert

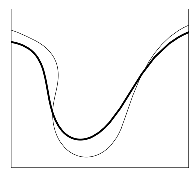
1. Kurzaufgaben

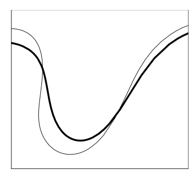
(a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{\vec{A}}(\vec{r}) \times \vec{r}) + \vec{\nabla} \times (\vec{A}(\vec{r}) \times \overset{\downarrow}{\vec{r}}) = ?$. Was ergibt sich für konstantes $\vec{A}$? (2)

(b) Die Energie des elektrischen Feldes ist durch $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r\, \vec{E} \cdot \vec{E}$ gegeben. Benutzen Sie für einen Faktor $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Welche zwei Terme ergeben sich daraus vermittels einer partiellen Integration? Welcher Term verschwindet auf Grund des Gaußschen Integralsatzes, wenn man fordert, dass im Unendlichen kein elektrisches Feld herrscht? Benutzen Sie für den verbleibenden Term eine Maxwellgleichung, um U durch ein Integral über ρ und ϕ auszudrücken. (2)

2. Sherlock Holmes und das Problem der Fahrradspuren

Sherlock Holmes ist in der Nähe eines Tatorts auf verdächtige Fahrradspuren gestoßen, die dem Anschein nach zum Tatort hin bzw. vom Tatort weg führen. Messerscharf schließt er, dass sich das Hinterrad auf Grund des größeren Gewichts tiefer in den Erdboden eingedrückt hat. Wenn er bloß wüsste, in welche Richtung (links/rechts) der Täter jeweils fuhr? Können Sie ihm helfen? Überlegen Sie dazu, auf welche Weise Sie ausgehend von der Spur des Hinterrades die Spur des Vorderrades rekonstruieren können und geben Sie eine entsprechende Gleichung an. Bestimmen Sie damit für die beiden Abbildungen die Fahrtrichtung. (3)





3. Radioaktiver Zerfall

Bei dem Zerfall der radioaktiven Substanz A wird die wiederum radioaktive Substanz B gebildet. Für die zeitliche Änderung der Teilchenzahlen $N_A(t)$, $N_B(t)$ gilt dementsprechend $\dot{N}_A = -\gamma_A N_A$ und $\dot{N}_B = -\dot{N}_A - \gamma_B N_B$. Lösen Sie die Differentialgleichung für N_B unter der Maßgabe, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ noch keine Substanz B vorhanden war und skizzieren Sie die Lösung. (3)

4. Zeitabhängige Reibungskraft

Auf einen fahrenden Wagen wirkt eine zeitabhängige Reibungskraft (auf Grund nachlassender Bremswirkung) und führt auf folgende Bewegungsgleichung

$$\dot{v}(t) = -\gamma \frac{v(t)}{1 + \alpha t}, \qquad \alpha, \gamma, t > 0.$$

- Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an. Können Sie im Grenzwert $\alpha \to 0$ eine bekannte Lösung rekonstruieren? (2)
- Welche Lösung erhalten Sie, falls der Wagen zusätzlich einer konstanten Beschleunigung g ausgesetzt ist? Setzen Sie eine lineare Funktion an, um eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung aufzufinden. Bestimmen Sie eine freie Konstante aus der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. (2)

☞ Bitte wenden!

5. Flüssigkeitsströmung in einem Zylinder

Beim Zubereiten eines Getränkes wurde eine Flüssigkeit in einer zylindrischen Kanne (Radius R, Höhe H) so umgerührt, dass das Geschwindigkeitsfeld die Gestalt $\vec{v}(\vec{r}) = \omega \vec{e}_z \times \vec{r}$ angenommen hat. Skizzieren Sie die Strömung in der Draufsicht.

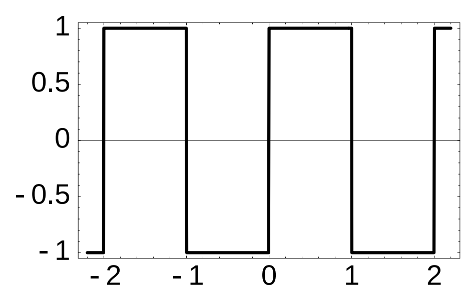
Überprüfen Sie die Gültigkeit des Stokesschen Integralsatzes $\int d\vec{f} \cdot \text{rot}\, \vec{v} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{v}$, indem Sie beide Seiten explizit für eine Kreisscheibe mit Radius R bzw. deren Rand auswerten, die sich auf halber Höhe des Zylinders über der xy-Ebene befindet. (3)

6. Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes

Drücken Sie die Divergenz des Poyntingvektors $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ mittels rot $\vec{E}$ und rot $\vec{B}$ aus. Verwenden Sie die Vakuum-Maxwellgleichungen, um den resultierenden Ausdruck als Zeitableitung $\partial_t(\dots)$ zu schreiben. Mit welcher Energiedichte W erfüllt $\vec{S}$ demnach eine Kontinuitätsgleichung? (2)

7. Fourierreihe

Berechnen Sie die Fourierreihenkoeffizienten der nebenstehend abgebildeten periodischen Funktion. Legen Sie bei den Integrationen das Intervall $[-1, +1]$ zu Grunde. Lesen Sie aus dem Parsevalschen Theorem eine Summenformel ab. (3)



8. Bestimmtes Integral per Fouriertransformation

Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = \alpha(\delta(t) - \delta(t - t_0))$ mit einem konstanten α und $t_0 > 0$. Es gelte $v(t < 0) \equiv 0$. Geben Sie zunächst die Lösung durch direkte Integration an. Welche Gleichung erfüllt die Fouriertransformierte $\tilde{v}(\omega)$? Durch welches Integral berechnet sich demnach $v(t)$? Wenn Sie beide Seiten für $t = \frac{t_0}{2}$ auswerten und den bekannten Wert von $v(\frac{t_0}{2})$ aus der Lösung verwenden, können Sie den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\sin(w t_0/2)}{w}$ ablesen. (3)

9. Geradengleichung in Polarkoordinaten

Die Bogenlänge L einer Kurve $\mathcal{C}$ in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ mit festen Endpunkten (r_0, φ_0) und (r_1, φ_1) berechnet sich bekanntlich gemäß $L[\mathcal{C}] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}$ mit $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ und $r(\varphi_0) = r_0$, $r(\varphi_1) = r_1$. Eine Minimierung von $L[\mathcal{C}]$ sollte als kürzeste Verbindung eine Gerade (in Polarkoordinaten) ergeben.

- Ersetzen Sie $r(\varphi) \to r(\varphi) + \eta(\varphi)$ und führen Sie die Variation von $L[\mathcal{C}]$ aus, indem Sie den Integranden bis zur ersten Ordnung in η und η' entwickeln. *Tipp*: $\sqrt{\alpha + 2\epsilon} = \sqrt{\alpha} + \frac{\epsilon}{\sqrt{\alpha}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Integrieren Sie den Term mit η' partiell, wobei Sie beachten sollten, dass die Variation in den Endpunkten verschwindet. Die Forderung nach einer verschwindenden Variation bedeutet, dass der Koeffizient von η identisch verschwindet. Zeigen Sie, dass dies die Differentialgleichung $rr'' - 2r'^2 - r^2 = 0$ nach sich zieht. (3)
- Weisen Sie nach, dass vermöge der Substitution $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$ obige Differentialgleichung in $u'' + u = 0$ übergeht. Lösen Sie diese für $r(0) = r_0$ und $r(\pi/2) = \infty$. Wie sieht damit $r(\varphi)$ aus? (2)

$\boxed{\Sigma = 30 \text{ P}}$